

۱. فرض کنید $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{4+t^2 \cosh t}$
الف) مشتق تابع f را به دست آورید.

ب) نشان دهید f وارون پذیر است و مشتق تابع وارون را در $x = 0$ به دست آورید. (۱۰ نمره)

۲. الف) اکستریم‌های تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^{\ln x}$ را بر بازه‌ی $(0, \infty)$ تعیین کنید.
ب) اگر $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابع اولیه‌ای برای f با شرط $F(1) = 0$ باشد نشان دهید که معادله‌ی $F(x) = \frac{1}{4}x$ دقیقاً یک جواب دارد. (۲۰ نمره)

۳. انتگرال‌های زیر را حساب کنید. (۲۰ نمره)

الف) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + 1}$ ب) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 4x + 5)^3}} dx$ ج) $\int_1^e x^2 (\log_3 x) dx$

۴. همگرایی یا واگرایی هر یک از انتگرال‌های زیر را بررسی کنید. (۱۵ نمره)

الف) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} \cosh x} dx$ ب) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x} \cosh x} dx$

از دو سوال ۵ و ۶ فقط به یکی پاسخ دهید.

۵. برای هر عدد حقیقی $x > 0$ نشان دهید $\frac{x}{x^2 + 1} < \tan^{-1} x$. (۵ نمره)

۶. دامنه همگرایی سری توان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{5^n}$ را تعیین کنید. (۵ نمره)

موفق باشید